1 Топологическая энтропия

Топологическая энтропия — в теории динамических систем неотрицательное вещественное число, которое является мерой сложности системы. Пусть задано непрерывное отображение T метрического компакта (X, d) в себя. Тогда метрика d_n на X определяется как

$$d_n(x, y) = \max_{0<=j<=n} d(T^j(x), T^j(y)) \quad (1)$$

Иными словами, это максимальное расстояние, на которое орбиты x и y расходятся за n итераций. Далее, для заданного $\varepsilon > 0$, говорят, что множество — (n,ε) -отделённое, если попарные d_n-расстояния между его точками не меньше ε, и мощность наибольшего такого множества обозначается через N (n , ε). Тогда топологической энтропией отображения T называется двойной предел

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} log N(n, \varepsilon) \quad (2)$$

Определение формализует следующее нестрогое понятие: для неизвестной начальной точки, какое количество информации нужно получить в расчёте на одну итерацию, чтобы предсказать большое количество итераций с небольшой фиксированной ошибкой.

2 Отличие топологической энтропии от метрической

В теории динамических систем, энтропия динамической системы — число, выражающее степень хаотичности её траекторий. Метрическая энтропи описывает хаотичность динамики в системе с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере, а топологическая энтропия описывает хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

3 P.S. Метрическая энтропия

Пусть(X, T, μ) — сохраняющая меру измеримая динамическая система. По определению, энтропией разбиения $X = \bigcup_{j=1}^{n} \xi_j$ называется число

$$H(\xi) := \sum_{j=1}^{n} -\mu(\xi_j) \log \mu(\xi_j),$$

определяющее информационную энтропию определения элемента разбиения, содержащего μ-случайную точку.

Итерационные измельчения разбиения ξ,

$$\xi^{(k)} = \{\xi_{i_1} \cap T^{-1}(\xi_{i_2}) \cap \cdots \cap T^{-k+1}(\xi_{i_k}) \mid 1 \le i_1, \ldots, i_k \le n\}$$

определяют, в каких элементах ξ оказывается точка на протяжении k итераций, а, соответственно, величина

$$h_\mu(T, \xi) = \lim \frac{1}{k} H(\xi^{(k)})$$

выражает информационную энтропию такого процесса. Наконец, **метрическая энтропия** отображения T по мере μ определяется как точная верхняя грань $h_\mu(\xi)$ по всевозможным разбиениям ξ:

$$h_\mu(T) := \sup_{\xi} h_\mu(T, \xi).$$